（問題）
”地球の赤道上に一本のロープを巻き付けたとする．このロープにさらに１メートル追加する（つまり全長は４０，０００，０００メートル＋１メートルで４０，０００，００１メートル）．さぁ，緩んだロープを地面から全周均等に持ち上げた時の高さは？”

（解法１）

問題を一般化させるためにロープを巻きつける球体（＝地球）の直径を$D_0$ [m]，ロープの初期長さを$L_0$ [m]，延長するロープの長さを$l$ [m]，ロープを延長して緩んだ後の地面とロープの高さを$h$ [m]とする．ロープの初期長さ$L_0$は(1)式となる．

$$L_0 = \pi D_0 \qquad (1)$$

ロープを$l$ [m]延長した時の全長を$L_1$とすると，(2)式になる．

$$L_1 = \pi D_0 + l \qquad (2)$$

この時の円の直径を$D_1$とすると，次式のように表される．

$$D_1 = \frac{(\pi D_0 + l)}{\pi} \qquad (3)$$

ロープを緩めた後の地面とロープの高さ$h$は次式のように表されるので，

$$h = \frac{D_1 - D_0}{2} \qquad (4)$$

(4)式に(3)式を代入すると(5)式を得られる．

$$h = \frac{l}{2\pi} \qquad (5)$$

(5)式に，$l = 1$ [m]を代入すると，$h = 1/2\pi \approx 0.159$ [m]．約 16[cm]である．

（考察Ａ）

(5)式に注目して欲しい．この式には（地球の）直径$D_0$が含まれていない．つまり直径約 1.3 万[km]の地球に巻いたロープを 1[m]延長しても，直径 1[m]のボールに巻いたロープを 1[m]延長しても，緩む高さは等しく約 16[cm]である．どんなに頑張ってピーンとロープを張っても，全長のたった 0.0000025[%]である 1[m]の遊びがあれば，地面から 16[cm]も浮いてしまうことになる．

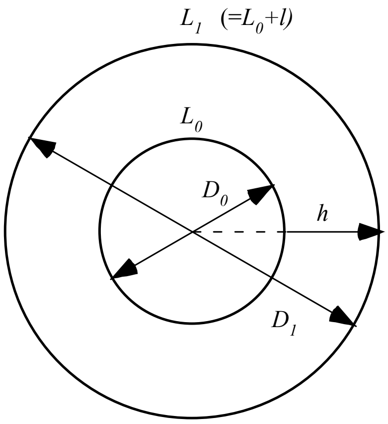
一見不可思議に思えるかも知れないが，実は緩んで持ち上がった高さも“たかだか”地球の半径（直径ではないですよ）の 0.0000025[%]に過ぎない．なぜならば，(5)式の両辺を球体の直径$D_0$で割れば，

$$\frac{h}{D_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{\pi D_0}\right) = \frac{1}{2}\frac{l}{L_0} \qquad (A1)$$

となることから明らかである．左辺は球体の直径に対する緩んで持ち上がる高さの比であり，右辺はロープの初期長さに対する追加したロープの長さの比である．(A1)式をもう少し分かり易く変形すると(A2)式になる．なお，$R_0$は球体の半径（$R_0 = D_0/2$）である．

$$h = R_0 \frac{l}{L_0} \qquad (A2)$$

（考察Ｂ－相似の関係を用いた解法）
そもそも最初から相似の関係を用いてこの計算を行っても同じ答えに到達する．




円周の比率と直径の比率の等式を(B1)式に示す．ここで $D_1$ はロープを追加した後の円の直径である．

$$\frac{L_0+l}{L_0}=\frac{D_1}{D_0} \tag{B1}$$

(1)式を $D_1$ の式に変形すると(B2)式になる．

$$D_1=D_0\frac{L_0+l}{L_0} \tag{B2}$$

$h_1$ は(B3)式のように表されるので，(B2)式を代入すると(B4)式を得る．

$$h=\frac{D_1-D_0}{2} \tag{B3}$$

$$\begin{aligned} h&=\frac{1}{2}\left(D_0\frac{L_0+l}{L_0}-D_0\right)\\ &=\frac{1}{2}\frac{D_0 l}{L_0}\\ &=R_0\frac{l}{L_0} \end{aligned} \tag{B4}$$

(B4)式は(A2)式と等しい．もちろん，(B4)式に $L_0=2\pi R_0$ を代入すれば(5)式を得られるが，そのことに気付く者は少ないだろう．(5)式の方がエレガントで深遠な式であることは言うまでもない[1]．

---

[1] とはいえ，$h=\dfrac{l}{2\pi}$ の形の式がもつ本質的な意味を私も本当に理解している訳ではない．